

L3 MAF
Corrigé partiel novembre 2015.

Exercice 1

- 1 - Le déterminant des sous-matrices principales $A(1:k, 1:k)$ ($k=1,2,3$) étant $\neq 0$, il existe une décomposition LU de A.
- 2 - $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$
- 3 $\alpha = (3/2 \ 2 \ 3/2)^T$
- 4 $A = D - E - F$ $J = D^{-1}(E+F)$ J symétrique
Spec $J = \{0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$ $\rho(J) = 1/\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 5 $\rho(J) < 1$ donc la méthode de Jacobi est convergente.

Exercice 2

Sachant que A est symétrique définie positive, il existe une décomposition $LL^T = A$ où L est triangulaire inférieure telle que $l_{ii} > 0$. On identifie les coeffs a_{ij} de A en fonction des coeffs l_{ij} de L dans le produit $A = LL^T$ dans l'ordre suivant: a_{11} , puis $a_{21}, \dots, a_{22}, a_{31}, \dots, a_{33}$. On obtient les formules:

$$l_{11} = a_{11}^{1/2}, \quad l_{j1} = a_{j1}/l_{11}, \dots, \quad l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2},$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik} \right) l_{ii}^{-1}$$

Exercice 3

1 - Par définition du conditionnement et de la norme matricielle

$$\begin{aligned}\text{Cond}(A^2) &= \|A^2\| \|(A^2)^{-1}\| = \|A^2\| \|(A^{-1})^2\| \\ &\leq \|A\|^2 \|A^{-1}\|^2 = [\text{Cond}(A)]^2\end{aligned}$$

2 - Comme A est symétrique $\text{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$ où λ_1 (resp. λ_n) est la plus grande (resp. petite) valeur propre en module de A . D'autre part, si λ est une valeur propre de A , alors il existe $v \neq 0$ tel que $Av = \lambda v$, donc $A^2 v = \lambda Av = \lambda^2 v$, et par conséquent λ^2 est valeur propre de A^2 . Ainsi

$$\text{cond}_2(A^2) = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_n^2} = [\text{Cond}(A)]^2.$$

Exercice 4

Soit A tridiagonale et $A = LU$ avec U triang. sup.^{re} et L triangulaire inf.^{re}, donc $L^{-1} = (m_{ij})$ triang. inf.^{re}. On a $U = L^{-1}A$. Si $j < i-1$ alors $u_{ij} = 0$ (U triang. sup.^{re}).

Si $j > i+1$ alors (A tridiagonale):

$$u_{ij} = \sum_{j-1 \leq k \leq j+1} m_{ik} a_{kj}$$

or $k \geq j-1 \Rightarrow k > i \Rightarrow m_{ik} = 0$ (L^{-1} triang. inf.^{re}),

donc $u_{ij} = 0$. D'où U tridiagonale.

Raisonnement analogue pour L .